VIII Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática

Segundo día

UEA — Universidade Estadual do Amazonas, Manaus

14 de septiembre de 2016

Problema 4.

Una matriz A de 2×2 es nilpotente si $A^2 = 0$. Sea N_s el conjunto de matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nilpotentes con entradas enteras tales que $a = s$. Encontrar todos los números enteros s tales que el conjunto N_s sea infinito.

Problema 5.

Decimos que $A \subset \mathbb{R}^k$, $(k = 1, 2)$, es un *abierto denso* si,

(i) para todo $z \in A$, existe un $\delta > 0$ con $B(z, \delta) \subset A$, y

(ii) para todo $p \in \mathbb{R}^k$ y todo $\varepsilon > 0$, $B(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,

donde $B(w, r) = \{q \in \mathbb{R}^k \mid ||q - w|| < r\}$ denota la bola abierta de centro w y radio r. Decimos que $R \subset \mathbb{R}^k$ es un *residual* si existe una sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos densos en $\mathbb{R}^k$ tales que $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset R$.

Determinar si los siguientes se cumplen:

a) Si $A \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto denso entonces existe $U \subset \mathbb{R}$ abierto denso tal que, para todo $y \in U$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ es un abierto denso.

b) Si $R \subset \mathbb{R}^2$ es un residual entonces existe $S \subset \mathbb{R}$ residual tal que, para todo $y \in S$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in R\}$ es un residual.

Nota. El símbolo $||x||$ denota la norma euclideana de x en $\mathbb{R}^k$. Si $x, y \in \mathbb{R}$, $||x|| = |x|$ y $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Problema 6.

Determinar todas las operaciones binarias conmutativas y asociativas en el conjunto de números enteros $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

(i) $0 * 0 = 0$, y

(ii) $(x + z) * (y + z) = (x * y) + z$ para cualesquiera x, y, z en $\mathbb{Z}$.

Nota. La operación $*$ es conmutativa si $x * y = y * x$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$; es asociativa si $x * (y * z) = (x * y) * z$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

La calificación máxima de cada problema es de 10 puntos.

Tiempo máximo: 4h 30m.