VIII Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática

Segundo dia

UEA — Universidade Estadual do Amazonas, Manaus

14 de setembro de 2016

Problema 4. Uma matriz A 2×2 é nilpotente se $A^2 = 0$. Seja N_s o conjunto das matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nilpotentes com entradas inteiras tais que $a = s$. Encontrar todos os números inteiros s tais que o conjunto N_s seja infinito.

Problema 5. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}^k$, $(k = 1, 2)$, é um *aberto denso* se,

(i) para todo $z \in A$, existe um $\delta > 0$ com $B(z,\delta) \subset A$, e

(ii) para todo $p \in \mathbb{R}^k$ e todo $\varepsilon > 0$, $B(p,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,

onde $B(w,r) = \{q \in \mathbb{R}^k \mid ||q - w|| < r\}$ denota a bola aberta de centro w e raio r. Dizemos que $R \subset \mathbb{R}^k$ é um *residual* se existe uma sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos em $\mathbb{R}^k$ tais que $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset R$.

Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto denso então existe $U \subset \mathbb{R}$ aberto denso tal que, para todo $y \in U$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$ é um aberto denso.

b) Se $R \subset \mathbb{R}^2$ é um residual então existe $S \subset \mathbb{R}$ residual tal que, para todo $y \in S$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in R\}$ é um residual.

Nota. O símbolo $||x||$ denota a norma euclidiana de x em $\mathbb{R}^k$. Se $x, y \in \mathbb{R}$, $||x|| = |x|$ e $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Problema 6. Determine todas as operações binárias comutativas e associativas no conjunto dos números inteiros $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

(i) $0 * 0 = 0$, e

(ii) $(x + z) * (y + z) = (x * y) + z$ para quaisquer x, y, z em $\mathbb{Z}$.

Nota. A operação $*$ é comutativa se $x * y = y * x$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$; é associativa se $x * (y * z) = (x * y) * z$ para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

A pontuação máxima de cada problema é de 10 pontos.

Tempo máximo: 4h 30m.